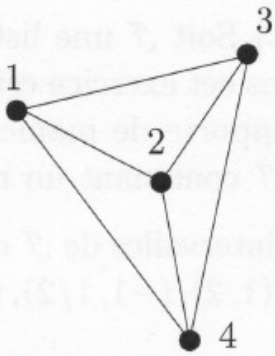
Epreuve de Culture Scientifique
Informatique



$$\Lambda_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Figure 1: Une suite P de 4 points et sa matrice Λ_P associée.

Exercice 1 [Chirotope.] Soit $P = [p_i]_{1 \leq i \leq n}$ une suite de n points de $\mathbb{R}^2$. Le *chirotope* χ_P de P est l'application qui à tout triplet (i, j, k) d'entiers de $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ associe le signe du déterminant des vecteurs $p_i\vec{p}_j, p_i\vec{p}_k$, c'est-à-dire

$$\chi_P(i,j,k) = \begin{cases} +1 & \text{si } \det(p_i\vec{p}_j, p_i\vec{p}_k) > 0 \\ -1 & \text{si } \det(p_i\vec{p}_j, p_i\vec{p}_k) < 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note λ_{ij} le cardinal de l'ensemble L_{ij} des $k \in [n]$ tels que $\chi_P(i, j, k) = +1$, et on note Λ_P la matrice des λ_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$.

Question 1.– On suppose que $\chi_P(i, i+1, i+2) = +1$ pour $1 \leq i \leq n-2$ et $\chi_P(n-1, n, 1) = \chi_P(n, 1, 2) = +1$. Quelle est la valeur de Λ_P?

On suppose que $\chi_P(i, j, k) \neq 0$ pour tout triplet (i, j, k) d'entiers distincts.

Question 2.– Montrer que la relation binaire $\mathcal{R}_{ij}$ définie par $(k, k') \in \mathcal{R}_{ij}$ si $\chi_P(i, k, k') = +1$ est une relation d'ordre total sur l'ensemble L_{ij}.

Question 3.– Montrer que la matrice Λ_P est calculable en faisant appel à $O(n^2 \log n)$ valeurs du chirotope de P.

Question 4.– Montrer que si $\Lambda_P = \Lambda_{P'}$ alors $\chi_P = \chi_{P'}$.

Question 5.– Montrer que l'ensemble des paires (i, j) telles que $\lambda_{ij} = 0$ est calculable en faisant appel à $O(n \log n)$ valeurs du chirotope de P.

Question 6.– Reprendre les questions précédentes en supprimant l'hypothèse « $\chi_P(i,j,k) \neq 0$ pour tout triplet (i,j,k) d'entiers distincts»?

Exercice 2 [Arbres de segments.] Soit $\mathcal{J}$ une liste finie de n intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Le problème étudié dans cet exercice est celui de concevoir une structure de données pour $\mathcal{J}$ qui supporte de manière efficace une requête du type «reporter les intervalles de $\mathcal{J}$ contenant un réel donné.»

Pour $x \in \mathbb{R}$ on note $\mathcal{J}(x)$ la liste des intervalles de $\mathcal{J}$ contenant le réel x. Par exemple pour $\mathcal{J} = [(1,2),(1/2,5/3),(1,2),(-1,1/2),(0,+\infty)]$ nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(2/3) &= [(1/2,5/3),(0,+\infty)] \\ \mathcal{J}(1/2) &= [(1,2),(1,2),(0,+\infty))] \\ \mathcal{J}(-2) &= \text{la liste vide.} \end{aligned}$$

Question 1.– Montrer que le cardinal de l'ensemble des $\mathcal{J}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, est un $O(n)$.

Question 2.– Proposer une structure de données de taille $O(n^2)$ constructible en temps $O(n^2)$ qui supporte une requête en temps $O(k + \log n)$ où k est le nombre d'intervalles à reporter.

Soit $x_1 = -\infty, x_2, x_3, \ldots, x_m = +\infty$ la liste triée des extrémités des n intervalles de $\mathcal{J}$ augmentée de $-\infty$ et $+\infty$. Nous définissons récursivement une famille d'intervalles ouverts $I_\nu \subseteq \mathbb{R}$, indexée par un sous-ensemble fini E d'entiers naturels, comme suit

1. $I_1 = (x_1, x_m)$
2. Si $I_\nu = (x_a, x_b)$ avec $b - a > 1$ alors $I_{2\nu} = (x_a, x_{[\frac{a+b}{2}]})$ et $I_{2\nu+1} = (x_{[\frac{a+b}{2}]}, x_b)$ où $[x]$ désigne la partie entière du réel x.

Pour $\nu \in E$ on note $S(\nu)$ la liste des intervalles J de $\mathcal{J}$ tels que $I_\nu \subseteq J$ et $I_{[\nu/2]} \not\subseteq J$.

Question 3.– Calculer les listes $S(\nu)$ associées à l'exemple donné au début de l'exercice.

Question 4.– Montrer que $\mathcal{J}(x)$ est la réunion disjointe d'une sous-famille des $S(\nu)$. En déduire une structure de données de taille $O(n \log n)$ constructible en temps $O(n \log n)$ qui supporte une requête en temps $O(k+\log n)$ où k est le nombre d'intervalles à reporter.

Question 5.– Comment faut-il modifier la structure de données de la question précédente afin de pouvoir insérer dans $\mathcal{J}$ ou supprimer de $\mathcal{J}$ de manière efficace un intervalle?

Question 6.– Un *rectangle* de $\mathbb{R}^2$ est le produit Cartésien de deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{R}$ une liste finie de rectangles de $\mathbb{R}^2$. Etudier le problème de reporter les rectangles de $\mathcal{R}$ contenant un élément donné de $\mathbb{R}^2$.

Exercice conseillé pour les candidats de la discipline secondaire.

Exercice 3 [Code de Gray.] Un *code de Gray* est une liste des 2^n chaînes de n bits dans laquelle deux chaînes consécutives diffèrent exactement d'un bit. Par exemple la liste

$$000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100$$

est un code de Gray des 8 chaînes de 3 bits. Pour $n = 1, 2, \ldots$, nous définissons une liste $\mathcal{L}_n$ de chaînes de n bits comme suit

1. $\mathcal{L}_1 = 0, 1$.
2. $\mathcal{L}_{n+1}$ est la concaténation de la liste $0 \oplus \mathcal{L}_n$, obtenue en préfixant d'un bit égal à 0 les chaînes de la liste $\mathcal{L}_n$, et de la liste $1 \oplus \overline{\mathcal{L}}_n$, obtenue en préfixant d'un bit égal à 1 les chaînes de l'inverse $\overline{\mathcal{L}}_n$ de la liste $\mathcal{L}_n$.

Par exemple

$\mathcal{L}_1 = 0, 1$ $\qquad\qquad$ $\overline{\mathcal{L}}_1 = 1, 0$

$\mathcal{L}_2 = 00, 01, 11, 10$ $\qquad\qquad$ $\overline{\mathcal{L}}_2 = 10, 11, 01, 00$

$$\mathcal{L}_3 = \underbrace{000, 001, 011, 010}_{0 \oplus \mathcal{L}_2}, \underbrace{110, 111, 101, 100}_{1 \oplus \overline{\mathcal{L}}_2}$$

Question 1.– Montrer que la liste $\mathcal{L}_n$ est un code de Gray.

Question 2.– Soit $m = \sum \epsilon_i 2^i$ la représentation binaire de l'entier m, et soit $\ldots e_3 e_2 e_1 e_0$ la chaîne de rang m de $\mathcal{L}_n$. Montrer que

$$e_i = \epsilon_i + \epsilon_{i+1} \bmod 2, \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Question 3.– Quelle est la chaîne de rang 3982226135 de la liste $\mathcal{L}_n$? Quel est le rang de la chaîne 100111000 de la liste $\mathcal{L}_n$?

La *distance de Hamming* $h(s,t)$ entre deux chaînes $s = s_1 s_2 \dots s_n$ et $t = t_1 t_2 \dots t_n$ de n bits est égale au nombre de positions où les bits de s et t diffèrent, c'est-à-dire le nombre de positions i telles que $s_i \neq t_i$. Le rang dans la liste $\mathcal{L}_n$ de la chaîne de bits s est noté $\rho(s)$. On pose

$$f(m) = \min_{h(s,t)\geq m} \{|\rho(s) - \rho(t)|\} \qquad (m \geq 1).$$

Question 4.– Montrer que $f(m) \geq \lceil 2^m/3 \rceil$. Est-ce la meilleure borne possible?

Lexique

Francais	Anglais	Allemand	Italien	Espagnol
Structure de données	data structure	Datenstruktur	struttura di dati	estructura de datos
Déterminant	determinant	Determinante	determinante	determinante
Extrémité	endpoint	Endpunkt	estremità	extremo
Relation	relation	Relation	relazione	relación
Binaire	binary	binär	binario	binario
Ordre	order	Ordnung	ordine	orden
Borne	bound	Schranke	extremo	cota
Taille	size	Grösse	misura	tamaño
Efficace	efficient	effizient	efficace	eficiente
Valeur	value	Wert	valore	valor
Requête	query	Anfrage	richiesta	demanda
Liste	list	Liste	lista	lista
Chaîne	string	Kette	sequenza	secuencia
Rang	rank	Rang	range	rango
Application	map	Abbildung	applicazione	aplicación
Concevoir	to design	entwerfen	concepire	diseñar
Reporter	to list	auflisten	elencare	listar
Montrer	to prove	beweisen	mostrare	demostrar
Différer	to differ	abweichen	differire	diferir
Supposer	to assume	annehmen	assumere	suponer
Calculer	to compute	berechnen	calcolare	calcular
calculable	computable	berechenbar	calcolàbile	computable
Insérer	to insert	einfügen	inserire	insertar
Supprimer	to delete	entfernen	supprimere	suprimir
Trier	to sort	sortieren	ordinare	ordenar